

Russellov Russellov paradoks

Goran Lojkić

Russellov paradoks razreda svih razreda koji nisu svoji članovi najpoznatija je antinomija tzv. naivne teorije skupova. Paradoks je izravno motivirao nastanak Russellove teorije tipova i, zajedno s drugim antinomijama naivne teorije, aksiomatizaciju teorije skupova. Međutim, puno je manje poznato na koji je način sam Russell, u svjetlu svojih onovremenih metafizičkih pogleda na narav razredā, isprva interpretirao paradoks koji je otkrio i rješenje koje je na paradoks ponudio. Cilj je ovoga rada izložiti Russellovo razumijevanje paradoksa i odgovora na nj u kontekstu njegove rane filozofije matematike.

Russellov paradoks

U svojoj filozofijskoj autobiografiji *My Philosophical Development* [31] Bertrand Russell piše da je u ljeto 1900. u Parizu, sudjelujući na prvom Međunarodnom filozofijskom kongresu, postao “svjestan važnosti logičke reforme za filozofiju matematike” [31, str. 65].¹ Kao presudan utjecaj navodi Peana, koji je “u svakoj raspravi pokazao više preciznosti i logičke strogosti nego što je pokazao bilo tko drugi” [31, str. 65]. Zamolio je Peana za primjerke njegovih radova i, kako kaže, “smjesta ih sve pročitao” [31, str. 65]. Prema Russellovu sjećanju, bio je kraj srpnja kada je upoznao Peana, a prvu radnu inačicu knjige *The Principles of Mathematics* [30] dovršio je do kraja iste godine (usp. [31, str. 72–73]).²

¹ Nije li navedeno drukčije, sve citate preveo je s engleskoga autor rada.

² Grattan-Guinness u [17, str. 57] Russellovu priču opisuje kao “apsurdno pogrješnu” te tvrdi da Russell većinu radova tzv. peanista nije zaprimio još mjesec dana od zahtjeva, a da se iz sačuvanih rukopisa vidi da je pisanje *Principles* trajalo do u 1902. godinu. Posebno, napominje da su ključni dijelovi s logikom relacija i definicijama cijelih brojeva nastali tek 1901. (usp. [17, str. 57–58]).

To razdoblje glasovito opisuje kao “intelektualni medeni mjesec kakav ni prije ni poslije nije nikada iskusio” [31, str. 73].

Peano u svojoj aksiomatizaciji aritmetike pomoću nove simboličke notacije u *Arithmetices principia* [26], maloj knjižici na latinskom u kojoj se prvi puta pojavljuju njegovi slavni aksiomi, oštro razlikuje matematičke od logičkih simbola (usp. [27, str. 85]). Posebno, tvrdi Peano, izrazi za brojeve pripadaju aritmetičkim, a ne logičkim simbolima. Russell, s druge strane, u *Principles* predlaže definiciju kojom se brojevi svode na određenu vrstu razreda. Preciznije, definira kardinalne brojeve kao razrede ekvipotentnih ili, držeći se Russellova nazivlja, sličnih (*similar*) razreda. Prema toj je definiciji broj 0 razred svih razreda bez ijednoga člana (tj. razred koji kao svoj jedini element sadrži prazan razred (*null-class*)), broj 1 razred je svih razreda sličnih razredu 0 (tj. razred svih razreda sa samo jednim članom), broj 2 pak razred svih razreda koji su slični razredu koji sadrži samo 0 i 1 (dakle, razred svih razreda koji sadrže upravo dva člana) itd. Za tu se definiciju uobičajilo ime ‘Frege-Russellova definicija brojeva’.³ Redni su brojevi definirani na sličan način, kao razredi sličnih dobro uređenih razreda. Unatoč odstupanju od Peana, te su definicije postale dostupne upravo zahvaljujući njemu: razlikovanje jediničnoga razreda od njegova jedinoga elementa, o kojem predložene definicije brojeva ovise, Russell iznosi kao jedno od najvažnijih tehničkih rezultata koje je naučio od Peana (usp. [31, str. 66–67]).⁴

³ Pritom, Fregeu pripada prednost i vjerojatno je upravo on, preko Peana, posredno utjecao na Russella. Definicija slična Russellovoj nalazi se u *Grundgesetze der Arithmetik* iz 1893. [10], ali Frege istu predlaže još 1884. u *Die Grundlagen der Arithmetik* [9], dakle barem šesnaest godina prije nego što Russell dolazi do iste ideje. Iako Russell još u listopadu 1900. posjeduje *Grundgesetze* i sa skromnim ih uspjehom pokušava čitati (usp. [2, str. 65]), prije predaje *Principles* u tisak u svibnju 1902. nije uspio “shvatiti njezinu važnost ili razumjeti njezin sadržaj” [30, str. xvi]. Tek u lipnju 1902. pažljivo čita Fregea i naknadno piše prvi dodatak knjige, naslovljen “The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege”, gdje za Fregeovo djelo kaže da “obiluje finim distinkcijama i izbjegava sve uobičajene pogriješke”, a za njegov simbolizam da je, iako nezgrapno za praktičnu primjenu, “zasnovan na analizi logičkih pojmova koja je mnogo dublja od Peanove” i da je ktomu “filozofijski jako nadmoćan” Peanovu [30, str. 501]. Svoju definiciju brojeva Russell, čini se, izravno duguje Peanu, jer u *Principles*, odgovarajući na prigovore definiciji, citira Peana, koji tu definiciju odbacuje (usp. [30, str. 115]). No Peano tu definiciju razmatra vjerojatno imajući na umu Fregeove *Grundgesetze*, prikaz kojih je objavio još 1895. u *Rivista di matematica* (usp. [33, str. xxvii]).

⁴ Puna priča o jediničnim razredima u *Principles* dosta je složenija, no više o tome kazat ćemo u trećem odsječku.

Međutim, smatra Russell, s definicijom brojeva u terminima razreda nestalo je potrebe razlikovati logičke od aritmetičkih simbola (ili logičke od aritmetičkih pojmova), kako to čini Peano. Pojam razreda pojam je koji pripada (također i) logici. Naime, Russell o razredima, u skladu s Booleovom logičkom tradicijom i pod utjecajem Whiteheadove *A Treatise on Universal Algebra* [36], razmišlja prije svega kao o opsezima pojmova (usp. [23, str. 635]).⁵ Znači to da se svi aritmetički pojmovi mogu definirati u terminima pojmova same logike. Svođenje aritmetičkoga pojma broja na pojam razreda tako postaje osnova Russellova pogleda na matematiku, prema kojemu se cjelokupna “čista” matematika u konačnici svodi na logiku. Malo preciznije govoreći, svi se pojmovi matematike mogu svesti na temeljne pojmove logike, a sve matematičke tvrdnje na logičke istine: cjelokupna je matematika izvedljiva iz općih logičkih aksioma. U predgovoru *The Principles of Mathematics* kaže Russell da je jedan od glavnih ciljeva knjige ponuditi “dokaz da se sva čista matematika bavi isključivo pojmovima definirljivim pomoću vrlo maloga broja temeljnih logičkih pojmova, a da su svi njezini stavci [*propositions*] izvedljivi iz vrlo maloga broja temeljnih logičkih načela” [30, str. xv]. Slično, na samom početku knjige, u prvoj rečenici prvoga poglavlja, naslovljenoga “Definition of Pure Mathematics”, Russell piše:

Čista je matematika razred svih stavaka oblika “ p implicira q ”, gdje su p i q stavci koji sadrže jednu ili više varijabla, istih u obama staccima, a ni p ni q ne sadrže nijednu konstantu osim logičkih konstanti. A sve su logičke konstante pojmovi definirljivi u terminima sljedećih: implikacije, relacije oznake [*term*] prema razredu kojega je član, pojma *takav da*, pojma relacije i takvih daljnjih pojmova koji mogu biti uključeni u pojam stavaka gore spomenuta oblika. Dodatno, matematika *rabi* pojam koji nije sastavnica [*constituent*] stavaka na koje se odnosi, naime pojam istine [30, str. 3].

Za stajalište prema kojemu su bilo sva matematika bilo samo određene njezine tradicionalne grane ili discipline svedljive na logiku kasnije se u filozofiji matematike ustalio naziv ‘logicizam’, a Russell je, uz Fregea,

⁵ Russell u [30, str. 18–19] piše da, za razliku od Peana, koji pojmove razreda i članstva u razredu uzima kao temeljne ili primitivne pojmove, u svojoj teoriji razreda polazi od tri nedefinirljiva pojma (*indefinables*): relacije članstva ili pripadnosti, stavčne funkcije – tj. svojevrsnoga Russellova poopćenja pojma *pojma* – i pojma “takav da” (*such that*). Malo dalje piše da “razred može biti definiran kao sve one oznake koje zadovoljavaju neku stavačnu funkciju” [30, str. 20]. Preciznije značenje te Russellove tvrdnje postat će jasnije u narednim odsječcima.

ostao povijesno najznačajniji njegov predstavnik.⁶ Iako će kasnije sam odbaciti gore citiranu definiciju čiste matematike i znatno promijeniti svoje početne metafizičke poglede o naravi predmeta logike i matematike, to osnovno razumijevanje odnosa logike i matematike Russell nikada nije napustio.⁷

Nažalost, kako se pokazalo, Russellov intelektualni medeni mjesec nije dugo potrajao i uskoro ga je zamijenila “intelektualna tuga” [31, str. 73]. Razmatrajući slavni Cantorov dokaz o nepostojanju najvećega kardinalnog broja, Russell u proljeće 1901. otkriva protuslovlje koje danas znamo pod imenom ‘Russellov paradoks’, iako isprva ne shvaćajući posve važnost paradoksa i misleći da je možda riječ tek o “trivijalnoj pogrješci u [njegovu] rasuđivanju” [31, str. 76].⁸ Iduće godine, nekoliko tjedana nakon što je rukopis *Principles* već predao u tisak, u kratkom pismu od 16. lipnja 1902. – pismu koje će tijekom narednoga stoljeća postati vjerojatno najcitiranije pismo u povijesti filozofije – Russell o otkrivenom paradoksu obavještava Fregea:

Neka je w prirok: biti prirok koji se ne može priricati sam sebi. Može li se w priricati sam sebi? Iz bilo kojega odgovora, suprotno slijedi. Stoga moramo zaključiti da w nije prirok. Slično tomu, ne postoji razred (kao sveukupnost)

⁶ Definicija logicizma prema kojoj je logicizam stajalište da se *sva* matematika može svesti na logiku bila bi prestroga (usp. [16, str. 171]). Russellov je logicizam radikalniji od Fregeova utoliko što Frege *nije* smatrao da se geometrija, za razliku od aritmetike, svodi na logiku. Russell jest, već stoga što je, za razliku od Fregea, prihvaćao aritmetizaciju geometrije. Sažet ali informativan prikaz razlike između Russellove i Fregeove koncepcije logicizma može se naći u [24, str. 13–16]. Sam izraz ‘logicizam’ nije ni Russellov ni Fregeov, već je kasnijega podrijetla i dugujemo ga Carnapu u [5].

⁷ Dobar dio uvoda drugomu izdanju *Principles* iz 1938. posvećuje Russell kritičkoj analizi svoje definicije čiste matematike s početka knjige, ali ujedno naglašava da nikada nije vidio nikakva razloga izmijeniti “temeljnu tezu [knjige], da su matematika i logika istovjetne” [30, str. v]. Koliko su se s vremenom Russellovi metafizički pogledi na logiku promijenili govori to što u vrijeme pisanja *My Philosophical Development*, izdane 1959., zakone logike smatra tek jezičnim konvencijama: “Više ne mislim da su zakoni logike zakoni stvari; naprotiv, sada ih smatram čisto jezičnima” [31, str. 102].

⁸ Griffin u [19] detaljno opisuje povijest i kontekst otkrića Russellova paradoksa, a Klement u [22] analizira odnos između Cantorova poučka o partitivnom skupu i različitih paradoksa koje je Russell bilo sam otkrio bilo samo razmatrao u svojim djelima, uključujući paradoks razreda koji nisu svoji članovi i paradoks priroka koji ne oprimjeruju sami sebe. Sam Russell u *Principles* otkriveni paradoks dosljedno naziva jednostavno ‘protuslovlje’ (*the contradiction*).

onih razreda koji, svaki uzet kao sveukupnost, ne pripadaju sami sebi. Iz toga zaključujem da pod određenim okolnostima definirljiva kolekcija [Menge] ne tvori sveukupnost [20, str. 125].⁹

Važno je napomenuti da Russell, kada govori o priroku, ne misli na jezični izraz, već otprilike na ono što bismo nazvali ‘svojstvo’, ‘atribut’ ili ‘pojam’. Više ćemo o tome kazati u narednom odsječku pa je za sada ta napomena dovoljna. Govoreći pak o razredu kao sveukupnosti (*totality*), Russell na umu ima kolekciju ili množinu entiteta koji, uzeti zajedno, tvore sjedinjenu *cjelinu*, tj. kolekciju entitetā koja se i sama može razumjeti kao *jedna* stvar ili kao zaseban *entitet*. Puno značenje toga izraza postat će nam jasno tek nakon analize u trećem odsječku, no Russellov jezik pritom vjerojatno odražava Cantorov način konceptualizacije problema tzv. paradoksalnih razreda. Cantor, naime, razlikuje dvije vrste razredā ili, vjernije njegovu nazivlju, dvije vrste mnoštvenosti (*Vielheiten*): suvisle, koje se mogu shvatiti kao neko *jedno*, kao jedna stvar (*Einheit*), i nesuvisle, koje se tako shvatiti ne mogu, npr. razred svih rednih brojeva, razred svih transfinitnih kardinalnih brojeva i sl.¹⁰ To je razlikovanje blisko razlici koju danas povlačimo u nekim aksiomatskim teorijama skupova (npr. u NBG) između skupova (tj. onih razreda koji su i sámi elementi drugih razreda) i pravih razreda (tj. razreda koji nisu elementi drugih razreda, koji su “preveliki” da bi bili skupovi).¹¹ Russellov ćemo paradoks stoga za početak opisati na danas standardan način, govoreći jednostavno o skupovima. Kako ćemo vidjeti, to standardno izlaganje paradoksa prikriva važnu filozofijsku distinkciju, ključnu za razumijevanje Russellove vlastite interpretacije otkrivenoga protuslovlja, njegova odgovora na nj predloženoga u dodatku *Principles*, kao i njegovih razloga za nezadovoljstvo tim odgovorom. Raspravu o tome moramo odgoditi dok se malo detaljnije ne upoznamo s pozadinskom ontologijom *Principles*, no vratit ćemo joj se u trećem odsječku.

⁹ Pismo je pisano na njemačkom jeziku, no prijevod je prema engleskomu prijevodu u [20], koji sadržava riječ ‘Menge’ unutar uglatih zagrada. U kratkoj napomeni prije engleskoga prijevoda pisma stoji da je Russell prijevod pregledao i odobrio ga.

¹⁰ Vidi Cantorovo pismo Dedekindu u [20, str. 113–117]. Cantini u [4, str. 880] (u podrubnici 5) navodi da se slično razlikovanje može naći još ranije kod Schrödera u [34].

¹¹ Kriterij razlikovanja između skupova i pravih razreda u teoriji NBG može se shvatiti kao preciziranje Cantorova kriterija: razred je neko jedno ako i samo ako je element nekoga razreda.

Pismo Fregeu sadrži dvije inačice paradoksa, skupovnu i priročnu – ili, kazano malo drukčijim riječima, ekstenzionalnu i intenzionalnu – no njihova je struktura ista. Russell polazi od naizgled nesporne i očigledno istinite pretpostavke o skupovima, odnosno prirocima, pokazujući da je iz te pretpostavke sasvim elementarnim načinom zaključivanja takoreći umah izvedljivo protuslovlje.

“Očigledno istinita” pretpostavka tzv. naivne teorije skupova jest ta da za svaki dobro definiran uvjet φ , iskazan npr. formulom s jednom slobodnom varijablom, postoji neki skup (možda prazan) koji kao svoje članove sadrži upravo one predmete koji uvjet u pitanju zadovoljavaju. Recimo, ako je φ “ x je ljudsko biće”, onda postoji skup koji kao članove sadrži sva ljudska bića i ništa što nije ljudsko biće nije njegov član. Ako je φ “ x je ljudsko biće i x nije ljudsko biće”, postoji skup koji sadrži sve i samo one predmete koji ujedno i jesu i nisu ljudska bića – naime, prazan skup. Ta se pretpostavka danas obično naziva načelom sadržaja (komprehenzije) ili načelom apstrakcije (ili, u kontekstu aksiomatizacije teorije skupova, aksiomatskom shemom sadržaja). U priročnoj inačici paradoksa imamo analogno načelo sadržaja za priroke, prema kojemu za svaki uvjet φ postoji odgovarajuće svojstvo koje se pririče (ili, kažemo još, koje je oprimjereno) upravo onim predmetima koji taj uvjet zadovoljavaju. Primjerice, ako je φ “ x je ljudsko biće”, postoji svojstvo (“ljudskost” ili “biti ljudsko biće”, recimo), koje pripada svim i samo onim predmetima koji zadovoljavaju φ .

Načelo sadržaja (bilo za skupove bilo za priroke) formalno možemo prikazati na sljedeći način:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi).$$

Neformalno čitano, postoji skup y kojega su članovi upravo oni predmeti x koji zadovoljavaju uvjet φ . Odnosno, u priročnoj inačici, prilagodimo li neformalno tumačenje znaka ‘ $\in$ ’, postoji prirok y koji se odnosi upravo na one predmete x koji zadovoljavaju uvjet φ . Radi jednostavnosti ograničimo vrijednosti varijabla na skupove, odnosno priroke, i uzmimo sada da je naš uvjet φ “biti skup koji ne pripada sam sebi” (tj. “ x nije element od x ”) ili “biti prirok koji se ne pririče sam sebi” (tj. “ x ne oprimjeruje x ”). Iz načela sadržaja tada slijedi:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x).$$

Taj iskaz kaže da postoji skup y kojega su članovi upravo oni skupovi koji nisu sami svoji članovi. Odnosno, da postoji prirok y koji je oprimjeren upravo onim prirocima koji nisu oprimjereni samima sobom. Nazovemo li taj skup ili prirok 'S', imamo:

$$\forall x (x \in S \leftrightarrow x \notin x).$$

Sada je lako vidjeti problem. Prema gornjemu iskazu, za *svaki* skup x vrijedi da je član skupa S ako i samo ako skup x nije sam svoj član. Vrijedi to za svaki skup x pa tako onda i za sam skup S . U priročnoj čitanju, gornji nam iskaz kaže da za svaki prirok x vrijedi da oprimjeruje prirok S ako i samo ako prirok x ne oprimjeruje sam sebe. Kako to vrijedi za svaki x , vrijedi i za prirok S . Stoga slijedi:

$$S \in S \leftrightarrow S \notin S.$$

Skup koji sadrži upravo one skupove koji sami sebe ne sadrže ujedno i jest i nije svoj član. Prirok koji se pririče upravo onim prirocima koji se ne pririču samima sebi ujedno i jest i nije oprimjeren samim sobom. Izvedeno protuslovlje jasno pokazuje da nešto nije u redu s naivnim načelom sadržaja – drugim riječima, da nešto nije u redu s našim “intuitivnim” ili “predteorijskim” razumijevanjem razredā i prirokā. Što točno nije u redu, puno je teže za vidjeti.

Za razliku od Russella samoga, Frege odmah uočava važnost njegova paradoksa.¹² U odgovoru Russellu piše da ga je njegovo otkriće iznenadilo i zapanjilo i uzdrimalo temelje na kojima se nadao izgraditi aritmetiku – štoviše, da se boji da paradoks prijeti ne samo njegovu već bilo kojemu mogućem utemeljenju aritmetike. No, koliko god se otkriće na prvi pogled čini neželjenim, kaže, možda će iz njega proizaći važan napredak u logici.¹³ U vrijeme kada prima Russellovo pismo, drugi sve-

¹² Iako se ponegdje tvrdi da je Russell postao svjestan važnosti paradoksa tek s Fregeovim dramatičnim odgovorom, Grattan-Guinness u [18, str. 324] upozorava da protiv toga govori već sama činjenica da Russell započinje korespondenciju s Fregeom nakon dovršetka *Principles* i poglavlja o paradoksu u prvom dijelu knjige. Prije znatnih izmjena teksta u korekturi, Russell u otkrivenom protuslovlju vidi ozbiljan problem za definiciju brojeva kao razredā sličnih razreda i čini mu se da bi se brojevi morali ipak prihvatiti kao nedefinirajući (usp. [2, str. 66]).

¹³ Engleski se prijevod Fregeova odgovora može naći u [20, str. 127–128]. Frege upozorava da se, strogo gledano, paradoks u obliku u kojem ga je opisao Russell ne

zak njegova glavnoga djela *Grundgesetze der Arithmetik* nalazi se u tisku i Frege knjizi uspijeva samo priložiti dodatak u kojem opisuje paradoks i iznosi – kako će se pokazati, neuspješan – prijedlog kako paradoks izbjeći.¹⁴ Od planiranoga trećeg sveska Frege odustaje, a kasniji njegovi radovi pokazuju da ga je Russellovo otkriće uvjerilo da je logicizam neistinit (usp. [16, str. 182]).

O paradoksu – ili protuslovlju, kako ga jednostavno naziva – Russell opširno piše u *The Principles of Mathematics*, posvećujući mu, između ostaloga, završno poglavlje prvoga dijela knjige, naslovljeno jednostavno “The Contradiction”. Naravno, određeni su paradoksi skupova bili poznati matematičarima i prije Russellova. Burali-Forti je paradoks najvećega rednog broja objavio još 1897., ali njime nije privukao veću pažnju.¹⁵ Cantor, doduše, paradoks najvećega kardinalnog broja, koji danas nosi njegovo ime, nije objavio, ali obznanio ga je u pismima Dedekindu 1899., a čini se da zna za antinomiju već 1895., možda čak i 1883. (usp. [19, str. 350] i [4, str. 879]).¹⁶ Štoviše, paradoks skupa skupova koji nisu svoji članovi – dakle, paradoks koji znamo kao ‘Russellov’ – od 1902., neovisno o Russellu i Fregeu, poznat je Hilbertu, Zermelu i Husserlu (usp. [4, str. 881–882]). Međutim, do Russella i Fregea paradoksi

može formulirati u njegovu sustavu – za Fregea, prirok se ne može priricati prirocima, tj. funkcija ne može kao svoj argument imati funkciju – ali da Russellovu formulaciju nije problem prikladno preinačiti.

¹⁴ U dodatku Frege piše: “Znanstvenom piscu jedva se može dogoditi nešto nepoželjnije negoli da mu se nakon dovršetka jednog rada uzdrma jedna od osnova njegove građevine. Ja sam stavljen u taj položaj pismom gospodina Bertranda Russella kad se tiskanje ovog sveska približavalo kraju...” (Prijevod Vladimira Devidéa preuzet je iz [8, str. 190].) Poznata analiza Fregeova prijedloga Quineov je “On Frege’s Way Out” [28], no Quine napominje, pozivajući se na Sobocińskog u [35], da je Leśniewski još 1938. pokazao da je Fregeov prijedlog nesuvisao.

¹⁵ Prijevod Burali-Fortijeva članka na engleski, “A Question on Transfinite Numbers”, nalazi se u [20, str. 105–112]. Svoj paradoks najvećega rednog broja Burali-Forti nije vidio kao *paradoks*, već tek kao *reductio* tvrdnje da je skup rednih brojeva linearno uređen (usp. [20, str. 104] i [4, str. 878–879]). Heijenoort u [20, str. 104] piše da je paradoks odmah izazvao zanimanje među matematičarima, ali Garciadiego u [13, str. 25–26] i, pozivajući se na nj, Griffin u [19, str. 350] tvrde da je, naprotiv, isprva potpuno ignoriran.

¹⁶ Engleski je prijevod Cantorova pisma Dedekindu od 28. srpnja 1889. u [20, str. 113–117]. U pismu Cantor razmatra i paradoks najvećega rednog broja i paradoks najvećega kardinalnog broja.

nisu prepoznati kao ozbiljan problem, bilo za matematiku bilo za logiku samu. Razlozi su različiti: s jedne strane, Cantor u paradoksima vidi otkriće da postoje nesuvisle mnoštvenosti, što smatra pozitivnim doprinosom svojoj teoriji; s druge strane, Hilbert i krug matematičara oko njega paradokse skupova vide jednostavno kao prirodnu i očekivanu pojavu u rastućoj mladoj disciplini kakva je u to vrijeme teorija skupova (usp. [19, str. 351–352] i [4, str. 883]). Tek Russell i Frege u paradoksima vide dubok problem, koji nije vezan samo uz pojedinu matematičku disciplinu, već logiku i mišljenje općenito. Kako Russell kasnije piše, paradoks je pokazao da “iz premisa koje su svi logičari, bilo koje škole, prihvaćali još od vremena Aristotela, mogu se izvesti protuslovlja” [31, str. 75]. Važnost je Russellova paradoksa, četiri desetljeća nakon njegova otkrića ocjenjuje Gödel, upravo u tome što je pokazao da su naše logičke intuicije protuslovne:

Analizirajući paradokse do kojih je dovela Cantorova teorija skupova, oslobodio ih je [Russell] svih tehničkih matematičkih detalja, izvevši tako na vidjelo zapanjujuću činjenicu da su naše logičke intuicije (tj. intuicije u pogledu takvih pojmova kao: istina, pojam [*concept*], biće [*being*], razred, itd.) protuslovne [15, str. 124].

U svega nekoliko godina nakon Russellova pojavljuju se u literaturi i drugi paradoksi, što, u uskom smislu, skupovnoteorijski, što, kako ih danas nazivamo, semantički.¹⁷ Kao jedan od odgovora na skupovnoteorijske paradokse, koji je u međuvremenu postao standardnim, razvijene su aksiomatske teorije skupova, prije svega ZF(C): ograničenjem aksiomatske sheme sadržaja – ili, drugim riječima, njezinom zamjenom aksiomatskom shemom odijeljenosti (separacije) – onemogućena je konstrukcija paradoksā, a dodatni aksiomi osiguravaju opstojnost pojedinih vrsta skupova, primjerice partitivnoga skupa, unije skupova i sl. Russellov je odgovor, s druge strane, logički sustav kojemu je dao ime ‘teorija tipova’.¹⁸

¹⁷ Russell mnoge od njih opisuje na početku članka “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types” [29, str. 222–224] i u uvodu *Principia Mathematica* [37, str. 60–61]. Copi u [7, str. 1–9] daje dobar uvodni opis i analizu paradoksā, a Cantini u [4] iznosi noviji povijesni prijedlog odnosa između paradoksā i razvoja matematičke logike.

¹⁸ Zermelo u [38] aksiomatizira teoriju skupova 1908., kada je Russell većim dijelom već razvio svoju razgranatu teoriju tipova. No, aksiomatska teorija skupova za logicista Russellova tipa ne bi bila posve zadovoljavajuće rješenje, ma koliko bila tehnički pri-

Russellov odgovor

Russellova teorija tipova, kao formalni okvir njegova logicističkoga projekta svođenja matematike na logiku, svoj će konačan oblik dobiti tek u trima svescima monumentalnoga djela *Principia Mathematica* [37], pisanima u suradnji s Whiteheadom i objavljenima od 1910. do 1913. No prvi okvirni nacrt teorije tipova Russell objavljuje već 1903. u drugom dodatku *The Principles of Mathematics*, naslovljenom “The Doctrine of Types”.¹⁹ Osnovnu ideju teorije tipova opisuje na sljedeći način:

Svaka stavačna funkcija [*propositional function*] $\varphi(x)$ [...] ima, uz svoje područje istinitosti, područje značenja [*range of significance*], tj. područje unutar kojega x mora ležati da bi $\varphi(x)$ uopće bila stavak [*proposition*], bilo istinit bilo neistinit. To je prva točka u teoriji tipova; druga je točka da područja značenja tvore *tipove*, tj. ako x pripada području značenja funkcije $\varphi(x)$, onda postoji razred predmetā, *tip* x -a, od kojih svi moraju također pripadati području značenja funkcije $\varphi(x)$, kako god φ varirao; a područje značenja uvijek je ili jedan tip ili zbroj nekoliko cijelih tipova [30, str. 523].

Da bismo razumjeli Russellov prijedlog, valja pojasniti što zapravo ima na umu kada u *Principles* govori o stavcima i stavačnim funkcijama. Stavci, naime, za nj nisu ni jezični ni mentalni entiteti, ali nisu – preciznije, nisu *svi* ili barem nisu na očekivan način – ni potpuno apstraktni ili idealni predmeti. Kako je za očekivati, u onome što slijedi mnoga ćemo suptilna Russellova filozofijska razmatranja morati zanemariti ili pojednostaviti.

Russell u predgovoru kaže da riječ ‘stavak’ definira na način koji odstupa od njezine (tada) uobičajene uporabe, prema kojoj se stavci “obično shvaćaju kao (1) istiniti ili neistiniti, (2) mentalni” [30, str. xix]. Slaže se da je ‘stavak’ primjereno ime za “ono istinito ili neistinito kao takvo” [30, str. xix], ali niječe da su stavci mentalni entiteti jer “ono što je istinito ili neistinito općenito nije mentalno” [30, str. xix]. Jednako tako, stavci nisu puke rečenice: “[S]tavak, osim ako nije jezični [*lingui-*

kladna: aksiomatski *stipulirati* koji skupovi postoje nije za logicista prihvatljiv način utemeljenja.

¹⁹ Dodatak je napisan krajem 1902., vjerojatno u prosincu, no rudimentarnu zamisao teorije tipova iznosi Russell već u pismu Fregeu od 8. kolovoza, u kojem kaže da je teorija analogna Fregeovu razlikovanju funkcija različitih razina (usp. [33, str. xxxviii–xxxix]).

stic], sam ne sadrži riječi: on sadrži entitete naznačene [*indicated*] riječima” [30, str. 47]. Stavci, dakle, za Russella nisu ni jezične ni mentalne reprezentacije – činjenica ili stanjā stvari, recimo – već otprilike ono što bismo smatrali samim činjenicama ili stanjima stvari, posebna vrsta složenih entiteta, općenito ontologijski neovisnih o jeziku kojim ih se izražava i umu koji ih spoznaje. Kada mislimo, vjerujemo ili tvrdimo neki stavak, taj stavak nije nešto (npr. rečenica ili misao) što tek imenuje ili znači neko stanje stvari, već upravo to stanje stvari sámo. Tvrdimo li da je Mont Blanc viši od 4000 metara, ne tvrdimo misao, koja je, prema Russellu, “privatna psihološka stvar” [11, str. 169], već sâm predmet te misli, složeni entitet kojega je sastavnica upravo planina o kojoj je riječ, a ne tek njezino ime, predodžba ili bilo kakav drugi posrednik.²⁰ Slično, sastavnicom toga složenog entiteta nije izraz ‘viši od 4000 metara’, nije ni mentalna predodžba koja odgovara tomu izrazu, ali jest *pojam* koji je tim izrazom naznačen.

Posljednja rečenica zahtijeva dodatno pojašnjenje. Za početak, važno je napomenuti da Russellovi metafizički pogledi u *Principles* uključuju svojevrsnu vrlo jaku inačicu ontologijskoga realizma:

Sve što može biti predmet mišljenja, ili što se može pojaviti u bilo kojem istinitom ili neistinitom stavku, ili računati kao *jedno*, nazivam *oznakom* [*term*]. To je tada najšira riječ u filozofijskom rječniku. Rabbit ću kao njoj istoznačne riječi jedinica [*unit*], pojedinačnost [*individual*] i biće [*entity*]. Prve dvije naglašavaju činjenicu da je svaka oznaka *jedno*, dok je treća izvedena iz činjenice da svaka oznaka ima bitak [*has being*], tj. u nekom smislu *jest*. Čovjek, trenutak, razred, relacija, himera, ili bilo što drugo što može biti spomenuto, svakako je oznaka; a zanimljivo da je takva i takva stvar oznaka uvijek mora biti neistinito [30, str. 43].

Sve što uopće može biti predmetom mišljenja *jest*, ima bitak, oznaka je. Oznake Russell dijeli na pojmove (*concepts*) i stvari (*things*). Pojmovi su ono što je naznačeno pridjevima i glagolima, tj. ono što naziva ‘priroci’ i ‘relacije’. Pojmovi u stavcima mogu imati dvije uloge. Osim kao podmet, ono o čemu je stavak, pojam se u stavku može “pojaviti i na drukčiji način” [30, str. 45] – naime, pojam može biti prirican oznakama, tj. odnositi se na podmete stavka, sâm biti o oznakama u stavku. Stvari su pak one oznake koje nisu pojmovi, tj. koje se ne mogu priricati drugim

²⁰ Primjer je iz pisma Fregeu od 12. prosinca 1904. Engleski se prijevod može naći u [11, str. 166–170].

oznakama – ili, drugim riječima, oznake koje u stavku mogu biti *samo* podmeti (usp. [30, str. 44–45]).²¹ Pojmovi pritom za Russella nisu, ništa više nego planine, tek nekakvi mentalni entiteti, predodžbe, psihološke sastavnice misli, već zasebni, o našim mislima i tvrdnjama neovisni idealni predmeti, jednako stvarni koliko i planine same.²²

Oznake su ili jednostavne ili složene, tj. cjeline (*wholes*). Neke cjeline ne pretpostavljaju nikakvu dodatnu uzajamnu povezanost svojih dijelova – cjelina je u tom slučaju “potpuno specificirana kada su sve njezine jednostavne sastavnice specificirane” [30, str. 139]. Takve cjeline naziva Russell ‘agregati’. Druge pak cjeline, one koje među svojim sastavnicama sadrže barem jedan pojam u njegovoj priručnoj ulozi, koji time strukturira cjelinu povezujući njezine dijelove na način na koji nisu međusobno povezani u agregatima – i koje stoga “nisu potpuno specificirane kada su svi njihovi dijelovi znani” [30, str. 140] – naziva Russell ‘jedinstva’ (*unities*) ili ‘stavci’. U primjeru koji daje, imamo li proizvoljne oznake *A* i *B* i pojam razlike, te tri oznake zajedno tvore jedan jedini agregat, ali sastavnice su dvaju različitih stavaka, “*A* se razlikuje od *B*” i “*B* se razlikuje od *A*” (usp. [30, str. 140]). Općenito, stavak da neka oznaka *A* ima svojstvo *P* složeni je entitet ili cjelina koje su sastavnice oznaka *A* i pojam *P*; stavak da je oznaka *A* u relaciji *R* s oznakom *B* složeni je entitet sastavljen od oznaka *A* i *B* i pojma *R* itd., no u svim tim slučajevima relevantan pojam nije tek jedna od oznaka u cjelini, već se u njoj javlja “kao povezujući ili kvalificirajući” [30, str. 140]. Oznake *A* i *B* pritom također mogu biti pojmovi ili pak mogu biti stvari. Kako su stavci, bili istiniti ili neistiniti, cjeline – složeni entiteti koji i sami mogu biti predmeti mišljenja – i istiniti i neistiniti stavci *jesu*, imaju bitak, oznake su.²³

²¹ Maloj terminološkoj zbrici pridonosi to što Russell ponegdje rabi ‘pridjev’ i ‘glagol’ za riječi koje naznačuju (*indicate*) pojmove, ponegdje pak za same pojmove, tj. za priroke i relacije. Također, ponegdje ‘oznaka’ rabi u užem smislu samo za podmet stavka pa govori o “*oznakama* stavka kao onim *oznakama*, koliko god brojne, koje se javljaju u stavku i mogu se shvatiti kao podmeti o kojima je stavak” [30, str. 45]. Tako, primjerice, u istom odsječku u kojem kaže da pridjevi naznačuju priroke, a glagoli relacije, ujedno piše da su priroci “pojmovi, osim glagola, koji se javljaju u stavcima koji imaju samo jednu oznaku ili podmet” [30, str. 45].

²² Prema Russellu, teorija po kojoj bi “pridjevi ili atributi ili idealne stvari, ili kako god ih zvali” bili nekako ontologijski manjkavi “čini se potpuno pogrešnom i lako svedljivom na protuslovlje” [30, str. 46].

²³ Teorija se usložnjava time što imati bitak *ne* znači ujedno i postojati. Russell strogo razlikuje bitak i opstojnost: “Razlika između bitka [*Being*] i opstojnosti [*existence*]

Primijetimo da Russell u iznad citiranom tekstu izričito tvrdi da sve što uopće *jest* jest neko *jedno* – ‘entitet’ i ‘pojedinačnost’ za nj su istoznačnice, koje se jednako odnose i na fizičke predmete i na razrede i na stavke. Imati na umu Russellovo prijanjanje u *Principles* uz tu “staru maksimu da ‘što god jest, jedno je’” [32, str. 189] važno je za razumijevanje finih nijansi njegove analize paradoksa i odgovora koji na nj daje.

Znajući sada što su za Russella stavci, možemo približno odgovoriti na pitanje što su stavačne funkcije. Pojam stavačne funkcije za Russella je jedan od temeljnih pojmova (*fundamental notions*), koji se stoga može objasniti, ali ne i definirati u pravom smislu (usp. [30, str. 19]). Objašnjavajući pojam, Russell kaže: “ $\varphi(x)$ je stavačna funkcija ako je, za svaku vrijednost x -a, $\varphi(x)$ stavak, određen [*determinate*] kada je dan x ” [30, str. 19]. Međutim, to je objašnjenje nedovoljno precizno – nije *svaka* funkcija koja svojim argumentima pridružuje stavke već samim time stavačna funkcija. Primjerice, funkcija koja Sokratu pridružuje stavak “Kiša pada”, Platonu stavak “Ulice su mokre”, a broju dva Pitagorin poučak nije stavačna funkcija. Stavačna funkcija svakom argumentu pridružuje stavak koji kao svoju *sastavnicu* sadržava taj isti argument. Štoviše, dva različita stavka koji su vrijednosti iste stavačne funkcije $\varphi(x)$ za dva različita argumenta a i b moraju biti takvi da se međusobno razlikuju *samo* utoliko što stavak $\varphi(a)$ (tj. stavak koji je vrijednost funkcije $\varphi(x)$ za argument a) kao svoju sastavnicu sadržava oznaku a , a stavak $\varphi(b)$ (tj. stavak koji funkcija $\varphi(x)$ pridružuje argumentu b) sadržava oznaku b . Russellov je primjer stavačne funkcije “ x je čovjek”:

U svakom stavku, koliko god složenom, koji ne sadržava slobodne [*real*] varijable, možemo zamisliti da je jedna od oznaka, ne glagol niti pridjev, zamijenjena drugom oznakom: umjesto “Sokrat je čovjek” možemo staviti “Platon je čovjek”, “broj 2 je čovjek” i tako dalje. Time dobivamo uzastopne stavke koji se slažu u svemu osim u jednoj promjenljivoj [*variable*] oznaci. Stavivši x za promjenjivu oznaku, “ x je čovjek” izražava tip svih takvih stavaka [30, str. 19–20].²⁴

važna je, a dobro se ilustrira postupkom brojanja. Što se može brojati, mora biti nešto i svakako mora *biti*, iako nipošto ne mora posjedovati daljnju povlasticu postojanja” [30, str. 71]. Time stvarima, pa onda i podmetima stavaka, mogu biti i “mnoge oznake koje ne postoje, primjerice točke u neeuclidskom prostoru i pseudopostojeći entiteti [*pseudo-existents*] nekoga romana” [30, str. 45]. Razlika između opstojnosti i bitka ključna je za razlikovanje istinitih i neistinitih stavaka, ali nama ta razlika ovdje nije toliko bitna.

²⁴ Izrazi ‘glagol’ i ‘pridjev’ ne odnose se pritom na riječi koje naznačuju pojmove (relacije i priroke), nego na pojmove same (vidi bilj. 21). Upozoriti na Russellovu

Pojedina se stavačna funkcija, prema Russellu, može shvatiti kao “tip” stavaka, tj. kao “razred svih stavaka koji nastaju varijacijom jedne oznake” [30, str. 93] ili, drugim riječima, kao razred svih stavaka koji dijele određenu postojanost oblika (*constancy of form*) (usp. [30, str. 89]). Primjerice, stavačnu funkciju “ x je čovjek” može se shvatiti kao razred stavaka {“Sokrat je čovjek”, “Platon je čovjek”, “Broj dva je čovjek”, ...}. Russell, međutim, napominje da je pojam stavačne funkcije već pretpostavljen u definiciji takvih razreda i da stoga to pojašnjenje ne treba razumjeti kao *definiciju* pojma stavačne funkcije (usp. [30, str. 89, 509]).²⁵ To će nam pojašnjenje morati dostajati: pokušati kazati više o stavačnim funkcijama, odvelo bi nas predaleko.²⁶

Vidimo, dakle, da tako međusobno različite stvari kao što su filozofi i brojevi mogu biti argumentima iste stavačne funkcije. Russell, naime, logiku razumije kao potpuno univerzalnu znanost: logičke su istine istinite jednako o filozofima koliko i o brojevima. Logika stoga, za razliku od drugih znanosti, nema neko zasebno, ograničeno predmetno područje: ništa što u bilo kojem smislu jest ne leži izvan njezina dohvata. Takav se pogled na logiku već na samom početku *Principles* odražava u Russellovu zahtjevu da logika (i time matematika) mora imati samo jednu vrstu “istinskih” varijabla, vrijednosti kojih mogu biti bilo koji entiteti. U protivnom, ako bi bilo što – Sokrat, recimo, ili broj dva, ili stavak da se Sokrat razlikuje od broja dva – ležalo nekako izvan područja argumenata stavačnih funkcija poput “ako je x čovjek, onda je x čovjek”, “ x je istovjetan x -u” i sl., ne bi doista bila riječ o potpuno univerzalnim istinama. Dopušteno je, dakako, po potrebi ograničiti moguće vrijednosti varijabla ili uvoditi posebne vrste varijabla (npr. za brojeve ili za

nemarnost u razlikovanju onoga što izraz označava od samoga izraza – drugim riječima, njegovu nepažljivost u razlikovanju između uporabe (*use*) i spominjanja (*mention*) izrazā – standardna je napomena u literaturi (usp. [24, str. 34] i [23, str. 634]).

²⁵ Kako smo spomenuli u bilj. 5, Russell opći pojam razreda definira pomoću pojma stavačne funkcije te bi stoga definicija stavačne funkcije u terminima razredā bila cirkularna.

²⁶ Kako točno valja razumjeti Russellove stavačne funkcije stari je interpretacijski problem. Primjerice, Geach je još sedamdesetih napisao da je način na koji Russell u *Principia Mathematica* rabi izraz ‘stavačna funkcija’ “beznadno zbrkan i nesuvisao” [14, str. 217], a Cartwright, tridesetak godina kasnije, da “pokušaji kazati što točno russellovska stavačna funkcija jest, ili što bi trebala biti, obvezno završavaju u frustraciji” [6, str. 915].

razrede), ali varijable koje se javljaju u rečenicama logike i matematike kada su precizno i u cijelosti izložene kao svoje vrijednosti mogu imati bilo što:

[U] svakom stavku čiste matematike, kada je u cijelosti izložen, varijable imaju apsolutno neograničeno područje [*field*]: bilo koji pomišljiv [*conceivable*] entitet može se supstituirati za bilo koju od naših varijabla bez štete za istinitost našega stavka [30, str. 7].

To stajalište tvori važan dio Russellova shvaćanja logike iz vremena *Principles* (ali i daleko nakon njih) i postat će kasnije poznato pod imenom ‘nauk o neograničenoj varijabli’ (*doctrine of the unrestricted variable*).²⁷ Prema nauku o neograničenoj varijabli, svaka stavačna funkcija *svakoj* oznaci pridružuje odgovarajući stavak: *bilo što* što jest, moguća je vrijednost varijable bilo koje stavačne funkcije.

Međutim, kako vidimo iz citata na početku odsječka, čini se da Russell, odgovarajući u dodatku knjizi na otkriveni paradoks, napušta nauk o neograničenoj varijabli. Prema predloženoj teoriji tipova, ne može bilo koji predmet biti argument bilo koje stavačne funkcije. Za neke vrijednosti varijable stavačna funkcija nije definirana, tj. argumentu ne pridružuje ni istinit ni neistinit stavak. Moguće vrijednosti varijable dane stavačne funkcije ograničene su na ono što Russell naziva ‘područjem značenja’ te funkcije.

Na koji način ograničenje mogućih vrijednosti varijabla stavačnih funkcija pomaže Russellu izbjeći paradoks? Prisjetimo se, u našoj smo analizi s početka ovoga rada kazali da je izvor paradoksa pretpostavka da za svaki uvjet φ postoji skup kojega su elementi upravo oni predmeti koji zadovoljavaju φ – odnosno, dijelom sada preuzevši Russellovo nazivlje, da za svaku stavačnu funkciju $\varphi(x)$ postoji skup upravo onih predmeta kojima $\varphi(x)$ pridružuje istinit stavak. Međutim, u izvodu protu-

²⁷ Što se točno tvrdi naukom o neograničenoj varijabli donekle je sporno. Nakon Heijenoortova utjecajna članka “Logic as Calculus and Logic as Language” [21] postalo je uobičajeno smatrati da nauk o neograničenoj varijabli povlači da logika mora sadržavati svoju metateoriju, ali Landini u [25, str. 268–269] piše da je nauk jednostavno sintaktički zahtjev da svaka formalna logička teorija mora usvojiti samo jednu vrstu varijabla (individualne ili entitetske varijable) i upozorava da je “važno ne pomiješati Russellov sintaktički nauk o neograničenoj varijabli sa semantičkim pitanjima koja se tiču dopustivoga područja varijabla”.

slovlja implicitno smo pretpostavili također to da je *skup* svih predmeta koji zadovoljavaju uvjet φ i sam jedan od predmeta za koje je legitimno pitati zadovoljava li φ – odnosno, da je taj skup i sam jedan od legitimnih argumenta stavačne funkcije $\varphi(x)$. Bez potonje se pretpostavke očito ne može izvesti protuslovlje da dotični skup ujedno i zadovoljava i ne zadovoljava φ , tj. da mu funkcija $\varphi(x)$ ujedno pridružuje i istinit i neistinit stavak. No ta pretpostavka trivijalno slijedi iz nauka o neograničenoj varijabli. Odbacivši nauk o neograničenoj varijabli i prikladno ograničivši moguće argumente stavačne funkcije, Russell onaj predmet koji je skup svih predmeta kojima dana funkcija pridružuje istinit stavak ostavlja izvan njezina područja značenja. Problematičan je skup uklonjen iz legitimnih argumenata te iste funkcije – njemu ona ne pridružuje nikakav stavak i protuslovlje je time izbjegnuto.

Russellov bismo prijedlog mogli opisati na sljedeći način. Suprotno nauku o neograničenoj varijabli, ne pridružuje svaka stavačna funkcija svakomu predmetu neki stavak, nego samo onim predmetima koji se nalaze u njezinu području značenja. Ta područja značenja tvore tipove – odnosno, ona nisu takoreći nasumično pridružena pojedinim funkcijama, nego postoji sustavan hijerarhijski način na koji su moguće vrijednosti varijabla stavačnih funkcija ograničene. S jedne strane, za svaki predmet x postoji neki maksimalan skup predmeta T takav da je *svaka* stavačna funkcija $\varphi(x)$ koja je definirana za x definirana ujedno i za *svaki* član skupa T .²⁸ Takve skupove Russell naziva minimalnim tipovima. Ako je stavačna funkcija definirana za *neki* predmet iz nekoga minimalnog tipa – drugim riječima, ako taj predmet sadržava u svojem području značenja, tj. pridružuje mu bilo istinit bilo neistinit stavak – onda je ona definirana i za *svaki* predmet iz toga minimalnog tipa. Uzmemo li neku pojedinačnost, primjerice Sokrata, postoji neki maksimalan skup predmeta – ovom je slučaju to skup svih pojedinačnosti – takav da je svaka stavačna funkcija koja Sokratu pridružuje bilo istinit bilo neistinit stavak definirana i za svaki član toga skupa, tj. za svaku pojedinačnost. Skup pojedinačnosti stoga je minimalan tip. Skup skupova pojedinačnosti također je minimalan tip: ako neka stavačna

²⁸ U tekstu citiranom na početku odsječka Russell ne navodi eksplicitno uvjet maksimalnosti, ali on se čini nužnim: u protivnom bi i skup $\{x\}$ bio tip, a to nije u skladu s Russellovim opisom teorije tipova dalje u tekstu.

funkcija ima vrijednost za neki skup pojedinačnosti kao svoj argument, onda ima i za svaki skup pojedinačnosti. Na temelju ideje da područja značenja tvore tipove, opisuje dalje Russell hijerarhiju tipova (i time hijerarhiju njima odgovarajućih stavačnih funkcija): skup svih oznaka ili pojedinačnosti najniži je minimalan tip, idući je minimalan tip skup svih skupova pojedinačnosti, zatim skup kojega su članovi svi skupovi skupova pojedinačnosti, i tako dalje. Općenito, piše Russell, skup od svojih elemenata “mora uvijek biti za jedan višega tipa” [30, str. 525]. S druge strane, ako je predmet određenoga minimalnog tipa argument neke stavačne funkcije, onda predmet nekoga drugog minimalnog tipa općenito nije legitiman argument te iste funkcije. Primjerice, ako neka funkcija skupu {Sokrat, Platon} pridružuje odgovarajući stavak, onda ona tipično ne će biti definirana ni za pojedinačnost poput Sokrata ni za skup poput {{Sokrat, Platon}, {Platon, Aristotel}}.²⁹ Skup svih argumenata kojima $\varphi(x)$ pridružuje istinit stavak, kako je taj skup različitoga minimalnog tipa od svojih članova, tj. od argumenata funkcije $\varphi(x)$, tipično ne će biti i sam jedan od legitimnih argumenata te iste funkcije. Time teorija tipova izbjegava paradokse poput onoga o skupu svih skupova koji nisu svoji članovi. Pored opisane hijerarhije tipova, zasebni su tipovi i skup svih uređenih parova pojedinačnosti, skup svih skupova uređenih parova pojedinačnosti, tj. skup dvomjesnih relacija (ekstenzionalno shvaćenih) između pojedinačnosti, skup dvomjesnih relacija između uređenih parova i sl. Zanimljivo je da Russell dopušta da se područje značenja *nekih* stavačnih funkcija sastoji od zbroya više minimalnih tipova, dobivamo tako standardnu tipsku strukturu onoga što danas nazivamo ‘jednostavna teorija tipova’.

Međutim, opis Russellova prijedloga u prethodnim odlomcima ne govori nam cijelu priču. Pažljivijem čitatelju dva su detalja mogla zapeti za oko. Najprije, predmeti najnižega tipa nazvani su ‘oznake’ i ‘pojedinačnosti’. No vidjeli smo da Russell izraze ‘oznaka’ i ‘pojedinačnost’ razumije kao istoznačnice izrazu ‘entitet’ – dakle, kao

²⁹ Postoje iznimke. Russell smatra da nisu samo minimalni tipovi tipovi: zbroj nekoliko minimalnih tipova također može biti tip, tj. područje značenja neke stavačne funkcije. Štoviše, kaže da mu se čini da “zbroj bilo kojega broja minimalnih tipova jest tip” [30, str. 525]. Razlog za to su stavačne funkcije poput “ x je istovjetan x -u”, koja daje (istinit) stavak za bilo koju vrijednost varijable – tj. za bilo koji predmet, bilo kojega minimalnog tipa – i koja stoga ima posve neograničeno područje značenja.

izraze koji se odnose na sve što uopće može biti predmetom mišljenja, na sve što ima bitak. Štoviše, vidjeli smo da i *razrede* Russell ubraja među pojedinačnosti. Kako to pomiriti s teorijom prema kojoj su pojedinačnosti samo neke od mogućih vrijednosti varijabla, tj. s teorijom prema kojoj skupovi *nisu* pojedinačnosti? Što Russell ima na umu kada u izlaganju teorije tipova govori o pojedinačnostima? Kao drugo, Russellov smo odgovor na protuslovlje opisali govoreći o *skupovima*. No, kako vidimo iz dijelova *Principles* koje smo citirali, termin koji Russell redovito rabi je ‘razred’, ne ‘skup’. Ima li kakve relevantne razlike između skupova i Russellovih razreda? Iako se riječ ‘skup’ (*set*) pojavljuje na mnogim mjestima u *Principles*, ona nema tehničko značenje kakvo imaju ‘razred’ (*class*) i s njim povezani izrazi poput ‘kolekcija’ (*collection*) i ‘agregat’ (*aggregate*) (usp. [18, str. 269]). Russellovi razredi pritom doista *ne* odgovaraju u potpunosti onomu što danas standardno razumijemo pod terminom ‘skup’. Strogo gledano, ontologija *Principles* – barem do samoga prijedloga teorije tipova u dodatku knjizi – uopće ne sadržava skupove.

Za razumijevanje Russellova odgovor na paradoks – i time načina na koji je on sam razumio paradoks koji je otkrio – moramo sada malo detaljnije pogledati o čemu Russell zapravo govori kada govori o razredima.

Russellovi razredi

Opisati Russellove filozofijske poglede na narav razreda i kako su se ti pogledi mijenjali tijekom pisanja *The Principles of Mathematics* nije jednostavan zadatak. Knjiga je objavljena u svibnju 1903., ali Russell na njoj radi od 1897., tijekom godina često i znatno revidirajući svoja stajališta. Različiti dijelovi objavljenoga teksta napisani su u različitim razdobljima, omeđenim trima ključnim događajima, i mnogi su ostatci u međuvremenu napuštenih pogleda pronašli put u završni tekst knjige. Prvi je ključan događaj Russellovo upoznavanje s Peanom početkom kolovoza 1900. i oduševljenje njegovim djelima. Drugi je otkriće paradoksa u travnju ili svibnju 1901. Treći je pažljivo čitanje Fregeovih *Grundgesetze* u lipnju 1902. (nakon što su *Principles* već predani u tisak) i korespondencija s Fregeom koja je uslijedila nakon toga. Od sedam glava od kojih se sastoje *Principles* većina je napisana do kraja 1900., za

trajanja peanovskoga medenog mjeseca, no prva i druga – koje su ujedno filozofijski najznačajniji dio knjige – dovršene su kasnije.³⁰ Završnu inačicu druge glave (“Number”) napisao je Russell u lipnju 1901., a prve (“Indefinables of Mathematics”) tek u svibnju 1902., no uključivši u nju gotovo sav tekst prethodne inačice napisane godinu dana ranije. Međutim, u obje se glave nalaze i reciklirani dijelovi ranijega pretpeanovskog rukopisa. Također, obje glave – uključujući šesto poglavlje prve glave (“Classes”), u cijelosti posvećeno raspravi o razredima, i posebice deseto poglavlje (“The Contradiction”), koje uključuje nekoliko različitih formulacija Russellova paradoksa, pokušaj logičke dijagnoze i naznake predloženih rješenja – sadržavaju znatne naknadne izmjene unesene tijekom korekture, često s uočljivim Fregeovim utjecajem. Dva dodatka, važna za razumijevanje Russellovih, uvjetno govoreći, konačnih pogleda na razrede u *Principles*, napisana su krajem 1902. Prvi dodatak (“The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege”), u kojem Russell, uspoređujući ih sa svojima, izlaže osnovne pojmove i ideje Fregeova pogleda na logiku i aritmetiku i modificira svoj nauk o razredima, dovršen je u studenom, a drugi (“The Doctrine of Types”), u kojem iznosi teoriju tipova kao prijedlog odgovora na paradoks, možda tek u prosincu. Korektura knjige, s većim ili manjim izmjenama teksta, trajala je do u veljaču 1903.³¹ Russellova se razmatranja o razredima stoga na mno-

³⁰ Sastavnih sedam cjelina koje tvore *Principles* naziva Russell jednostavno ‘dijelovi’ (*parts*), no radi jasnoće, tj. kako bismo izbjegli moguću zabunu oko toga govorimo li u tekstu o samim tim sastavnim cjelinama ili o proizvoljnim dijelovima *Principles*, nazivamo ih ovdje ‘glave’.

³¹ Detaljniji opis povijesti i konteksta nastanka *Principles*, kao i Russellovih ranijih stajališta i utjecaja na njih, može se naći u [18]. Kronološka tablica nastanka pojedinih dijelova knjige nalazi se na str. 294 i u njoj je dovršetak obaju dodataka datiran u početak studenoga 1902. Rani rukopis iz 1899.–1900., koji prethodi Peanovu utjecaju, i rekonstruirana inačica prve glave *Principles* iz svibnja 1901., u kojoj Russell prvi put piše o otkrivenom protuslovlju, objavljene su u [33], s informativnim uvodom i pratećim tekstovima urednika G. H. Moorea. Kronološka tablica s podacima o Russellovu životu i filozofijskim i matematičkim radovima u razdoblju između kraja kolovoza 1899. i svibnja 1903. nalazi se na str. liii–lviii, no bez podatka o tome kada su napisani dodatci. Međutim, piše da je izdavač 15. studenog 1902. zaprimio dodatak A (usp. [33, str. lvi]), a Moore u uvodnom tekstu kaže da je dodatak B napisan vjerojatno u prosincu (usp. [33, str. xxxix]). Promjene koje je Russell u korekturi naknadno unio u predgovor i tekst prve glave sabrao je Blackwell u [1], a za drugu je glavu isto učinio Byrd u [2]. Blackwell u [1, str. 284] napominje da je moguće da su i oba dodatka naknadno revidirana.

gim mjestima u *Principles* međusobno znatno razlikuju – ponegdje čak izravno protusloveći jedna drugima – čuvajući tragove različitih “rješenja koja su [Russella] neko vrijeme zadovoljavala” [30, str. xix]. Slijedeći te tragove, pokušat ćemo rekonstruirati kako je Russell, u svjetlu svojih metafizičkih pogleda na narav razredā, sam razumio paradoks koji je otkrio i rješenje koje je na nj predložio. Kao i često do sada, određena pojednostavljivanja bit će pritom neizbježna.

Temeljna distinkcija u Russellovoj metafizici razredā u *Principles* ona je između razreda kao mnoštva (*class as many*) i razreda kao jednog (*class as one*). Razred kao mnoštvo jednostavno je mnoštvenost ili množina (*plurality*) danih oznaka ili pojedinačnosti – preciznije, svih onih oznaka koje zadovoljavaju neku stavačnu funkciju – no množina oznaka shvaćena upravo *qua* množina, tj. ne kao *jedan* entitet, ne kao zasebna *cjelina* konstituirana tim oznakama. Razred kao mnoštvo sâm nije oznaka, nije pojedinačnost, nije zaseban entitet, nego samo mnoštvenost oznaka, množina pojedinačnosti, mnoštvo danih entiteta. Za razred kao mnoštvo rabi Russell također izraz ‘kolekcija’.³² Iako kolekcije, strogo gledano, nemaju bitak – u smislu da nisu *zasebni* entiteti, nisu oznake – Russell i o njima govori kao o predmetima (*objects*), što, suprotno tekstu koji smo citirali na početku drugoga odsječka, upravo ‘predmet’ čini najširom riječi u njegovu filozofijskom rječniku.³³

Razred kao jedno, s druge strane, jest *cjelina* sastavljena od danih pojedinačnosti, jedinstven složeni entitet koji tvore pojedinačnosti u pitanju. Razred kao jedno i sam je, dakle, neko *jedno*, tj. zasebna oznaka ili pojedinačnost. Od stavaka, koji su, kako smo vidjeli, također cjeline ili složeni entiteti, razred kao jedno razlikuje se time što je “određen čim su njegove sastavnice znane” [30, str. 139]. Primjerice, imamo li oznake *A* i *B* i relaciju *R*, oni zajedno tvore jedan jedini razred kao jedno, iako su sastavnice dvaju različitih stavaka – naime, stavka da je *A* u relaciji *R*

³² Upozorava pritom da je, iako je riječ ‘kolekcija’ gramatički u jednini, ono na što se ona odnosi “bitno množina [*essentially plural*]” [30, str. 70]. Očito, sličan je problem s našim prijevodom ‘razred kao mnoštvo’. Precizniji bi prijevod bio ‘razred kao mnoga’, no činio nam se jezično ekstravagantnim.

³³ U podrubnici naknadno dodanoj u korekturi (usp. [1, str. 285]) Russell napominje da riječ ‘predmet’ rabi “u širem smislu od *oznaka*, tako da pokriva i jedninu i množinu”, no upozorava da mogućnost riječi sa širim značenjem od ‘oznaka’ vodi “teškim logičkim problemima” [30, str. 55].

prema *B* i stavka da je *B* u relaciji *R* prema *A*. Razred kao jedno, drugim riječima, ono je što Russell naziva ‘agregat’.³⁴

Razlika između razreda kao mnoštva i razreda kao jednoga, kaže Russell, često se povlači u jeziku. Uzevši neke od njegovih primjera, govorimo li o prostornim točkama, trenutcima, vojnicima i Francuzima, govorimo o razredima kao mnoštvima; govorimo li o prostoru, vremenu, vojsci i francuskoj naciji, riječ je o razredima kao jednima (usp. [30, str. 68, 524]). Stavci poput “Sokrat je jedan od ljudi” izražavaju relaciju između entiteta i množine entiteta, između oznake i razreda kao mnoštva kojemu ta oznaka pripada. S druge strane, stavci poput “Sokrat pripada ljudskoj vrsti” izražavaju relaciju između dvaju entiteta, između oznake i razreda kao jednoga – u ovom slučaju, “relaciju između Sokrata i ljudske vrste, tj. između oznake i njezina razreda shvaćenoga kao cjeline” [30, str. 78].

Razred kao mnoštvo i razred kao jedno mogu, dakako, sadržavati posve iste oznake, ali oni – barem u slučaju kada se sastoje od više od jedne pojedinačnosti – nisu time *isti* predmet. Odnosno, nije tako da je jedan te isti razred “jedno u jednom smislu, a mnoštvo u drugom” [30, str. 76]. Naime, kaže Russell, “kad god se razred sastoji od više od jedne oznake, može se dokazati da takvo poistovjećivanje nije dopustivo” [30, str. 76].³⁵ No i razred kao mnoštvo i razred kao jedno logički su

³⁴ Razlikovanje između kolekcija i agregata prisutno je već u Russellovu pretpisnom rukopisu iz 1899.–1900., iako u njemu još ne rabi izraze ‘razred kao mnoštvo’ i ‘razred kao jedno’. Dijelovi poglavlja “Meaning of Whole and Part” toga rukopisa uključeni su u poglavlje “Whole and Part” završnoga teksta *Principles*. Knjiga stoga sadržava malu terminološku neujednačenost glede izrazâ ‘cjelina’ i ‘agregat’. Naime, u spomenutom se poglavlju rukopisa ti izrazi rabe samo za *složene* (*complex*) oznake (usp. [33 str. 35]). To je značenje preneseno i u odgovarajuće poglavlje u *Principles* (usp. [30, str. 137]) pa se u njemu ‘cjelina’ ne odnosi na *jedinični* razred kao jedno, tj. na razred kao jedno koji sadržava samo jednu oznaku. Stoga na kraju poglavlja Russell piše da “ono što smo zvali razredima kao jednima može se uvijek, osim ako sadržavaju jednu ili nijednu oznaku, [...] protumačiti kao agregat” [30, str. 141]. Međutim, u (kasnije pisanom) poglavlju “Classes”, Russell rabi ‘cjelina’ u širem smislu tako da uključuje i cjeline sastavljene od svega jedne oznake (usp. [30., str. 77]).

³⁵ Razlog koji navodi taj je što različiti pojmovi označavaju (*denote*) razred kao mnoštvo i razred kao jedno, no ako bi razred kao mnoštvo bio istovjetan odgovarajućemu razredu kao jednom, “slijedilo bi da što god denotira jedan, mora denotirati i drugi” [30, str. 76]. Kazati više o tome tražilo bi ekskurs u Russellovu teoriju označavajućih pojmova.

neophodni. S jedne strane, razred kao mnoštvo ono je čemu se pririču brojevi veći od jedan.³⁶ Drugim riječima, samo se u slučaju razreda kao mnoštva, sadržava li više od jedne oznake, radi o “predmetu” koji *su* oznake, a ne koji *je* oznaka (usp. [30, str. 68]).³⁷ Primjerice, stavak “Sokrat i Platon su dvojica” ne može biti o cjelini sastavljenoj od Sokrata i Platona jer cjelina je, kao zaseban entitet, “samo i bitno jedno” [30, str. 68]. No Russell upozorava da se razred kao mnoštvo, kako on *nije* zaseban entitet, ne smije shvatiti kao jedinstven logički podmet takvih stavaka. *Samo* oznake mogu biti logički podmeti: sve što je podmet nekoga stavka, kako je samim time pojedinačan predmet misli, ujedno je i oznaka. Stoga, kada se brojevi pririču razredu kao mnoštvu, stavak u pitanju nema jedan podmet, nego množinu podmetā:

U takvim stavcima kao “*A i B su dvoje*” ne postoji logički podmet: ta tvrdnja nije ni o *A* ni o *B* ni o cjelini sastavljenoj od oboje, nego strogo i samo o *A i B*. Stoga se čini da tvrdnje nisu nužno o jedinstvenim [*single*] podmetima, nego mogu biti o mnogim [*many*] podmetima [30, str. 76–77].

S druge strane, “nužno je da možemo brojati svaki razred kao jedan” [30, str. 76] i uobičajeno “govorimo o jednoj kolekciji, jednoj mnoštvenosti [*manifold*] itd., a čini se da u svakom od tih slučajeva doista postoji nešto što je jedna oznaka” [30, str. 141]. Stoga su nam, uz razrede kao mnoštva, potrebni i agregati svih oznaka danoga razreda.

Isprva Russell upravo razred kao jedno uzima kao onaj smisao ‘razreda’ koji je relevantan za simboličku logiku i, samim time, za matematiku. Relacija pripadnosti razredu, koju označavamo simbolom ‘ $\in$ ’, relacija je između dviju oznaka – dakle, relacija oznake spram razreda kao jednoga.³⁸ Naime, piše Russell, razred kao mnoštvo “ne može biti *kao takav* predstavljen jednim slovom: stoga u svakoj mogućoj simboličkoj logici slova koja stoje za razrede ne mogu predstavljati razrede *kao*

³⁶ Preciznije govoreći, brojevi se *ne* pririču jer, prema Russellu, brojevi su određena vrsta razredā (razredi ekvipotentnih razreda) i stoga nisu pojmovi nego stvari. Ispravnije bi bilo napisati da su razredi kao mnoštva ono o čemu se može tvrditi da su nekoga broja, ali, kako nam to ovdje nije presudno, dopuštamo radi jednostavnosti jezika tu nepreciznost.

³⁷ Prisjetimo se, ‘predmet’ se ne odnosi samo na oznake, tj. entitete, nego i na množine oznaka (usp. bilj. 33).

³⁸ Malo preciznije, Russell ne rabi danas standardni simbol ‘ $\in$ ’, nego Peanov ‘ ϵ ’.

mnoštva” [30, str. 78].³⁹ Iz toga razloga ‘ $\in$ ’, povezujući u matematičkoj notaciji dva simbola, “ne može predstavljati relaciju oznake prema njezinu razredu kao mnoštvu” [30, str. 78].⁴⁰ Matematički stavci o razredima, dakle, stavci su o agregatima. Ta se napomena može učiniti kao stvar puke filozofijske sitničavosti jer moglo bi djelovati očitim – i svakako je isprva tako djelovalo Russellu – da za svaku kolekciju entiteta postoji ujedno agregat tih istih entiteta.⁴¹

Uočimo da razredi, bilo kao kolekcije bilo kao agregati, nisu za Russella apstraktni predmeti poput skupova. Razred kao mnoštvo nije nešto povrh ili pored množine pojedinačnosti koje ga tvore, već upravo ta sama množina pojedinačnosti. Kolekcija svih slika na zidu, primjerice, upravo je množina slika, te konkretne slike same. Slično, agregat svih slika na zidu cjelina je tih istih slika, konkretan složeni entitet kojega su slike u pitanju konkretni dijelovi. Stoga za Russella – za razliku od Peana – ne postoji razlika između razreda, bilo kao kolekcije bilo kao agregata, koji sadrži jednu jedinu oznaku i te njegove jedine oznake: mnoštvo od jedne jedine pojedinačnosti jednostavno je ta jedna pojedinačnost, a cjelina sastavljena od svega jednoga entiteta nije drugo do taj entitet sam. Peanova je distinkcija, kaže Russell, “nedopustiva u našem pogledu

³⁹ Russell je neko vrijeme neodlučan oko toga bi li kao središnje značenje ‘razreda’ uzeo razred kao mnoštvo ili razred kao jedno. U odsječku iz kojega citiramo rabi izraz ‘razred’ (bez kvalifikacije) za razrede kao mnoštva i stoga za relaciju $\in$ ne kaže da je relacija oznake i razreda kojega je član nego samo da je s tom relacijom povezana (*allied*). No drugdje (u odsječku koji se čini ranije napisanim) za $\in$ kaže da je relacija “pojedinačnosti prema razredu kojemu pripada, tj. relacija Sokrata prema ljudskoj vrsti” [30, str. 19]. Slično tomu, u naknadno umetnutom dijelu završnoga odsječka poglavlja o razredima (usp. [1, str. 286]) piše da stavak “Sokrat pripada ljudskoj vrsti” “izražava relaciju pojedinačnosti prema svojem razredu i, kako mogućnost relacije zahtijeva, uzima razred kao jedno, ne kao mnoštvo” [30, str. 81]. No u svim tim trima slučajevima – iako u prvom ‘razred’ rabi za razred kao mnoštvo, a u drugim dvama za razred kao jedno – $\in$ je relacija između oznake i cjeline, ne oznake i mnoštva.

⁴⁰ Nije potpuno jasno zašto je Russell smatrao da se razred kao mnoštvo ne može u matematičkoj notaciji prikazati jednim slovom. Moguće je da je jedan od razloga jednostavno taj što bi predstavljanje razreda kao mnoštva jednim slovom prirodno sugeriralo da razred kao mnoštvo može biti podmet stavka, tj. da je oznaka.

⁴¹ Primjerice, Russell u rukopisu iz 1899.–1900. izričito tvrdi da “svaka je cjelina jedno, a svaka kolekcija oznaka A , B , C itd. sastavlja [*composes*] cjelinu” [33, str. 16], da “[b]ilo koja kolekcija, iako je kao takva mnoštvo [*many*], ipak sastavlja cjelinu” [33, str. 37] i da “bilo koja kolekcija oznaka oblikuje cjelinu” [33, str. 39].

na razrede” [30, str. 73]. Jednako tako, u Russellovu pogledu na razrede ne postoji prazan razred: nema mnoštva bez ijedne pojedinačnosti ni cjeline bez ijednoga dijela.⁴²

Uočimo također da razred kao mnoštvo – već samim time što je kolekcija bitno *množina*, što kolekcija nije pojedinačnost – ne može sam biti član razreda, tj. ne može biti *jedna* od oznaka u razredu. Općenito, nema ograničenja što može biti član kolekcije “osim što nijedno ne smije biti mnoštvo [*many*]” [30, str. 71]. Razred kao jedno – samim time što je i sam pojedinačnost – može, dakako, biti jedna od oznaka u razredu. Međutim, primjećuje Russell, razred kao jedno, sastoji li se od više od jedne oznake, ne može kao jednu od svojih oznaka sadržavati *sam sebe* – “složena cjelina ne može nikada biti jedna od svojih sastavnica” [30, str. 69]. S druge strane, čini mu se jasnim da razred kao jedno može biti član “toga istoga” razreda kao mnoštva – preciznije govoreći, razred kao jedno može biti i sam jedna od mnoštva oznaka koje tvore taj isti razred kao jedno. Primjerice, razred svih razreda, uzet kao cjelina, i sam je jedan od razreda (usp. [30, str. 69, 102, 134]).

No pogledajmo sada one razrede kao mnoštva koji, uzeti svaki kao jedno, *nisu* jedan od članova “njih samih”. Malo preciznije, kolekcije takve da agregat svih njihovih oznaka sam nije jedna od oznaka u toj kolekciji. Kolekcija svih filozofa, recimo, takva je kolekcija jer agregat svih filozofa nije jedan od filozofa. Pretpostavimo li da svakomu mnoštvu odgovara neka cjelina sastavljena upravo od oznaka toga mnoštva – kako Russell isprva pretpostavlja – za svaku takvu kolekciju postoji njoj odgovarajući agregat.⁴³ Uzmimo sada kolekciju svih *tih* agregata, tj. razred kao mnoštvo svih razreda kao jednih koji nisu jedna od mnoštva svojih oznaka. Opet, prema pretpostavci, i za taj razred kao mnoštvo postoji razred kao jedno svih njegovih oznaka – drugim riječima, postoji agregat svih agregata koji nisu jedna od svojih oznaka. Uzmimo,

⁴² Iako Russell smatra da je prazan razred “fikcija” [30, str. 80], slaže se da nas simbolička notacija i ustaljena matematička praksa obvezuju “uvesti neki takav pojam” [30, str. 73] pa kao supstitut za ulogu praznoga razreda predlaže razred svih stavačnih funkcija koje nisu istinite ni za jednu oznaku. Iz sličnih je razloga potrebno i razlikovanje jediničnoga razreda i njegova jedinoga člana i u tom je smislu “nesumnjivo da je Peanova distinkcija ispravna” [30, str. 131], no svoj prijedlog kako to učiniti Russell kasnije uklanja u korekturi (usp. [2, str. 68]).

⁴³ Usp. bilj. 41.

dakle, taj razred kao jedno i zapitajmo se je li on sam jedna od oznaka iz mnoštva svih njegovih oznaka. Iz svakoga odgovora slijedi suprotno. To je Russellov paradoks, kako ga je opisao u pismu Fregeu.

Paradoks pokazuje, smatra Russell, da je pogriješna pretpostavka da za svaku kolekciju vrijedi da postoji agregat svih pojedinačnosti te kolekcije:

Smatrali smo aksiomatskim da se razred kao jedno može naći gdje god postoji razred kao mnoštvo; no taj aksiom ne mora biti općenito prihvaćen i izgleda da je on izvor protuslovlja [30, str. 104].

Ponekad za razred kao mnoštvo ne postoji odgovarajući razred kao jedno. Svaka nam stavačna funkcija daje razred kao mnoštvo, ali nema jamca da nam je time ujedno dan razred kao jedno. Sada napokon postaje jasna Russellova dijagnoza paradoksa iz pisma Fregeu: u nekim slučajevima definirljiva kolekcija – razred kao mnoštvo svih oznaka koje zadovoljavaju stavačnu funkciju – ne tvori sveukupnost, tj. nema odgovarajuće cjeline, razreda kao jednoga svih oznaka dane kolekcije.⁴⁴

Paradoks vodi Russella k prihvaćanju kao središnjega i matematički jedinoga relevantnog značenja ‘razreda’ ne više razred kao jedno, već razred kao mnoštvo, “jedini predmet koji je uvijek definiran stavačnom funkcijom” [30, str. 491]. Prema revidiranomu pogledu na razrede, sada su stavci poput “Sokrat je jedan od ljudi” oni koji izražavaju pripadnost razredu u pravom smislu, ne više stavci poput “Sokrat pripada ljudskoj vrsti”. Matematički relevantna relacija članstva u razredu, relacija koju označavamo s ‘ $\in$ ’, za Russella nije više relacija između dviju oznaka, već relacija predmeta spram razreda kao mnoštva predmetā. Očito, znači to da sada dopušta da se u logičkoj notaciji razred kao mnoštvo prikazuje jednim simbolom.

Revidirajući u prvom dodatku *Principles* svoj nauk o razredima, Russell razmatra i odbacuje različite alternativne koncepcije razreda, uključujući onu prema kojoj se razred može poistovjetiti s cjelinom sastavljenom od svih oznaka toga razreda. Razlog odbacivanja upravo je to što,

⁴⁴ U rukopisu iz svibnja 1901., u kojem prvi put razmatra otkriveni paradoks, izrazi ‘razred kao mnoštvo’ i ‘razred kao jedno’ još se ne pojavljuju i Russell ‘razred’, bez dodatnih kvalifikacija, rabi samo za agregate. U rukopisu stoga jednostavno kaže da paradoks pokazuje “da ne tvori svaka definirljiva kolekcija razred” [33, str. 195].

po cijenu protuslovlja, odgovarajuća cjelina “ne može uvijek postojati kao oznaka” [30, str. 515], tj. što ne postoji za svako mnoštvo oznaka razred kao jedno svih oznaka u pitanju. S druge strane, problematična je i koncepcija razreda prema kojoj bi razred bio puka množina oznaka. Za razliku od razreda kao jednoga, postojanje razreda kao mnoštva uvijek je, doduše, logički neosporno, ali nevolja je u tome što razred kao mnoštvo sam nije zaseban entitet. Kako nije pojedinačnost, vidjeli smo gore, razred kao mnoštvo ne može biti *jedna* od oznaka u razredu. Općenito, kako razred kao mnoštvo nije entitet, razred kao mnoštvo ne može biti logički podmet stavka i zato uopće ne postoji nijedan stavak da je neki razred *kao mnoštvo* član nekoga razreda. Stoga, ako su razredi kao mnoštva jedino što imamo na raspolaganju, slijedi neprihvatljiva posljedica da više ne možemo govoriti o razredima razredā – razred razredā, naime, u tom slučaju ne bi bio mnoštvo oznaka, već “mnoštvo mnoštava [*many many's*]” [30, str. 516].

Odgovor na koji je Russell prisiljen svojevrсно je “postvarenje” razredā kao mnoštava:

Iako je razred mnoštvo, a ne jedno, ipak postoji istovjetnost [*identity*] i različitost [*diversity*] među razredima i stoga razredi mogu biti brojani kao da je svaki pravo jedinstvo [*genuine unity*]; i u tom smislu možemo govoriti o *jednom* razredu i o razredima koji su članovi razreda razredā [30, str. 516–517].

Dvije su važne posljedice toga postvarenja. Prva je da Russellovi razredi postaju vrlo tajnovita vrsta predmetā – otprilike ono što danas nazivamo ‘skupovi’. Dopuštanjem da je razred kao mnoštvo i sam u nekom smislu *jedno* – čime razred kao mnoštvo može biti *jedan* od članova nekoga daljnjeg razreda – omogućeni su razredi razredā (kao mnoštava) kao legitimna vrsta predmetā. No time se nameće peanovsko razlikovanje između jediničnoga razreda i njegova jedinoga člana, barem kada je član o kojem je riječ razred s više od jednoga člana. Argument je jednostavan. Neka je *S* razred s više od jednoga člana, a *S'* razred kojega je jedini član *S*. Tada, ako bi *S'* bio istovjetan *S*-u, *S'* bi, suprotno pretpostavci, imao više od jednoga člana. Russell stoga sada jednostavno prihvaća da je u svim slučajevima jedinični razred različit predmet od njegova jedinoga člana. No ako smo već prihvatili tu distinkciju, “možemo dakako također dopustiti [razred] u slučaju prazne stavačne funkcije” [30, str. 517], tj. dopustiti postojanje praznoga razreda. Problem je sada kako

točno shvatiti što su zapravo Russellovi razredi. U slučaju kada razred ima više od jednoga člana, razred možemo poistovjetiti s mnoštvom njegovih članova, kaže Russell (usp. [30, str. 517]), no prisiljeni smo ujedno dopustiti postojanje razreda koji su različiti od svojega jedinog člana, kao i razred bez ijednoga člana uopće.⁴⁵ Kolekcije su, kao i agregati, djelovale metafizički nevinima, ali to nije slučaj s praznim mnoštvom i mnoštvom različitim od jedinoga predmeta u tome mnoštvu.

Druga je posljedica postvarenja razreda hijerarhija logičkih tipova. Razred kao mnoštvo, smatra sada Russell, *može* i sam biti logički podmet, ali, kako razredi kao mnoštva nisu oznake, “u stavcima različite vrste od onih u kojima su njegove oznake podmeti” [30, str. 105]. Razredi kao mnoštva predmeti su logički drukčijega tipa nego oznake. Priroci i relacije koje se odnose na razrede “različiti su (uz neke iznimke) od onih koji se mogu pojaviti u stavcima koji imaju pojedinačne [*single*] oznake kao podmete” [30, str. 516]. Drugim riječima, stavačne funkcije kojima argument može biti bilo koja *oznaka* obično ne će kao svoje argumente imati razrede oznaka, razrede razreda itd. To je razlikovanje logičkih tipova u osnovi Russellove teorije tipova: “Temeljni nauk na kojem sve počiva nauk je da podmet stavka može biti množina [*plural*]” [30, str. 517].

Zaključak

“Filozofija je”, piše Bertrand Russell u *The Principles of Mathematics*, “uglavnom pitanje uvida i percepcije” [30, str. 129]. Svako matematičko istraživanje polazi od određenih nedokažljivih stavaka i nedefinirljivih entiteta, a uloga je filozofije u utemeljenju matematike, između ostaloga, raspoznavanje i razlučivanje tih polaznih matematičkih entiteta. Jedan od ciljeva knjige, kaže Russell u predgovoru, “objašnjenje je temeljnih pojmova koje matematika prihvaća kao nedefinirljive” [30, str. xv]. Taj

⁴⁵ Prihvativši u prvom dodatku *Principles* prazan razred i distinkciju između razreda i jedinoga člana toga razreda, Russell razrede (kao mnoštva), prevevši odgovarajući Fregeov termin (*Werthverläufe*), počinje nazivati ‘područja’ (*ranges*). Taj izraz dosljedno rabi u drugom dodatku, ograničivši izraz ‘razred’ na područja kojih su svi članovi međusobno istoga tipa.

je filozofijski pothvat “nastojanje vidjeti jasno, i učiniti da i drugi vide jasno, dotične entitete, kako bi um mogao imati onu vrstu upoznatosti s njima kakvu ima s crvenošću ili okusom ananasa” [30, str. xv]. Međutim, piše da nije uspio “percipirati nijedan pojam koji zadovoljava uvjete tražene za pojam *razreda*” [30, str. xv–xvi]. Razlog je, dakako, paradoks koji je otkrio tijekom pisanja knjige.

Svojim prijedlogom rješenja paradoksa Russell nije bio zadovoljan – između ostaloga, upravo zbog problematične metafizike razreda u pozadini toga prijedloga.⁴⁶ Množinama predmeta koje, iako nisu zasebni entiteti, jesu logički podmeti stavaka, mnoštvima različitima od jedinoga predmeta u mnoštvu i kolekcijama bez ijednoga predmeta u kolekciji nije jednostavno dati ontologijsku domovnicu. Također, reificiranjem razreda kao mnoštava, tj. činjenjem njih logičkim podmetima, razlika između razreda kao mnoštva i razreda kao jednoga ne djeluje više nimalo očitom. Razredi kao mnoštva i sami se čine punokrvnim entitetima prema svim Russellovim kriterijima: predmeti su mišljenja, sastavnice su stavaka, mogu se brojati (usp. [30, str. 43]). No tada teorijom tipova iznesenom u drugom dodatku *Principles* Russell doista napušta nauk o neograničenoj varijabli: unatoč tomu što ‘oznakama’ i ‘pojedinačnostima’ naziva samo predmete na najnižoj razini tipske hijerarhije, ti predmeti *ne* uključuju sve entitete.⁴⁷ Vidjeli smo, međutim, da je nauk o neograničenoj varijabli sastavni dio Russellova shvaćanja logike kao potpuno univerzalne znanosti. U godinama koje su uslijedile nakon *Principles* problemi tamo iznesene teorije tipova nagnali su Russella rješenje paradoksa potražiti u pokušajima potpune eliminacije razreda i drugih problematičnih entiteta iz pozadinske ontologije, kulminirajući u izgradnji razgranate teorije tipova u *Principia Mathematica*.

⁴⁶ Uz nevolje s razredima, Russellov je prijedlog i stavke učinio problematičnom vrstom predmeta. Kao prvo, kako za svaki predmet, uključujući razrede kao mnoštva, postoji stavak da je taj predmet istovjetan samomu sebi – i kako pritom razreda ima strogo više od pojedinačnosti – čini se da stavci ne mogu biti pojedinačnosti iako su, kako smo vidjeli, za Russella stavci cjeline, složeni entiteti. Kao drugo, Russell pokazuje da je, pod plauzibilnom pretpostavkom da stavci tvore jedinstveni tip, izvedljivo protuslovlje. Formalna analiza Russellova paradoksa stavaka može se naći u [12] i [3].

⁴⁷ Russell stoga, opisujući teoriju tipova, za oznaku ili pojedinačnost samo kaže da je “bilo koji predmet koji nije područje” [30, str. 523], tj. bilo što što nije razred kao mnoštvo (usp. bilj. 45).

Literatura

- [1] Blackwell, K. (1984), "Part I of *The Principles of Mathematics*", *Russell*, 4 (2), 271–288.
- [2] Byrd, M. (1987), "Part II of *The Principles of Mathematics*", *Russell*, 7 (1), 60–70.
- [3] Cantini, A. (2004), "On a Russellian Paradox about Propositions and Truth". U: *One Hundred Years of Russell's Paradox*, ur. G. Link, Berlin – New York: Walter de Gruyter, 259– 284.
- [4] Cantini, A. (2009), "Paradoxes, Self-Reference and Truth in the 20th Century". U: *Handbook of the History of Logic, Volume 5. Logic from Russell to Church*, ur. D. M. Gabbay i J. Woods, Amsterdam: Elsevier, 875–1013.
- [5] Carnap, R. (1929), *Abriss der Logistik, mit besondere Berücksichtigung der Relationstheorie und ihre Anwendungen*, Wien: Springer.
- [6] Cartwright, R. L. (2005), "Remarks on Propositional Functions", *Mind*, 114 (456), 915–927.
- [7] Copi, I. (1971), *The Theory of Logical Types*, London: Routledge & Kegan Paul.
- [8] Devidé, V. (1991), *Matematička čitanka*, Zagreb: Školska knjiga.
- [9] Frege, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner.
- [10] Frege, G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena: Verlag Hermann Pohle.
- [11] Frege, G. (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, ur. G. Gabriel, Oxford: Blackwell.
- [12] Fuhrmann, A. (2001), "Russell's Early Type Theory and the Paradox of Propositions", *Principia*, 5 (1–2), 19–41.
- [13] Garciadiego, A. R. (1992), *Bertrand Russell and the Origins of the Set-Theoretic 'Paradoxes'*, Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag.
- [14] Geach, P. (1972), *Logic Matters*, Oxford: Blackwell.
- [15] Gödel, K. (1990) [1944], "Russell's Mathematical Logic". U: Gödel, K. (1990), *Collected Works, Vol. II: Publications 1938–1974*, ur. S. Feferman et al., New York – Oxford: Oxford University Press, 119–141.
- [16] Godwyn, M. i Irvine, A. D. (2003), "Bertrand Russell's Logicism". U: *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, ur. N. Griffin, New York: Cambridge University Press, 171–201.
- [17] Grattan-Guinness, I. (2003), "Mathematics in and behind Russell's Logicism, and Its Reception". U: *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, ur. N. Griffin, New York: Cambridge University Press, 51–83.

- [18] Grattan-Guinness, I. (2003), "Russell's Way In: From Certainty to Paradoxes, 1895–1903". U: Grattan-Guinness, I. (2003), *The Search for Mathematical Roots, 1870–1940*, Princeton – Oxford: Princeton University Press, 268–332.
- [19] Griffin, N. (2004), "The Prehistory of Russell's Paradox". U: *One Hundred Years of Russell's Paradox*, ur. G. Link, Berlin – New York: Walter de Gruyter, 349–371.
- [20] Heijenoort, J. van (1967) (ur.) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- [21] Heijenoort, J. van (1967), "Logic as Calculus and Logic as Language", *Synthese*, 17(3), 324–330.
- [22] Klement, K. C. (2010), "Russell, His Paradoxes, and Cantor's Theorem", *Philosophy Compass*, 5 (1), 16–41.
- [23] Klement, K. C. (2010), "The Functions of Russell's No Class Theory", *The Review of Symbolic Logic*, 3 (4), 633–664.
- [24] Landini, G. (1998), *Russell's Hidden Substitutional Theory*, New York – Oxford: Oxford University Press.
- [25] Landini, G. (2004), "Russell's 'Separation' of the Logical and Semantic Paradoxes", *Revue Internationale de Philosophie*, 58 (229), 257–294.
- [26] Peano, I. (1889), *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Augustae Taurinorum: Fratres Bocca.
- [27] Peano, G. (1967) [engleski prijevod [26] (dio)], "The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method". U: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, ur. J. van Heijenoort, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 85–97.
- [28] Quine, W. V. (1955), "On Frege's Way Out", *Mind*, New Series, 64 (254), 145–159.
- [29] Russell, B. (1908), "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics*, 30 (3), 222–262.
- [30] Russell, B. (1938) [1.izdanje1903.], *The Principles of Mathematics* (2. izdanje), New York: W. W. Norton & Company.
- [31] Russell, B. (1959), *My Philosophical Development*, New York: Simon and Schuster.
- [32] Russell, B. (1973) [rukopis iz 1906.], "On the Substitutional Theory of Classes and Relations". U: Russell, B. (1973), *Essays in Analysis*, ur. D. Lackey, London: Allen & Unwin, 165–189.
- [33] Russell, B. (1993), *The Collected Papers of Bertrand Russell. Volume 3: Toward the "Principles of Mathematics" 1900–02*, ur. G. H. Moore, London – New York: Routledge.

- [34] Schröder, E. (1890), *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, sv. 1, Leipzig: Teubner.
- [35] Sobociński, B. (1949), “L’analyse de l’antinomie russellienne par Lesniewski”, *Methodos*, 1, 94–107, 220–228, 308–316.
- [36] Whitehead, A. N. (1898), *A Treatise on Universal Algebra*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [37] Whitehead, A. N. i Russell, B. (1925–1927) [1. izdanje 1910–1913], *Principia Mathematica*, sv. 1–3, 2. izdanje, Cambridge: Cambridge University Press.
- [38] Zermelo, E. (1908), “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I”, *Mathematische Annalen*, 65, 261–281.

